

## Evasión de obstáculos en línea para manipuladores redundantes con restricciones

Rogelio Portillo, Carlos A. Cruz, and Alejandro Rodriguez

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.  
Av. IPN No. 2508, C.P. 07360, México D.F., México  
{rportillo, cacruz, aangeles}@cinvestav.mx  
<http://www.cinvestav.mx>

**Resumen** Este artículo presenta un método de evasión de obstáculos en línea para manipuladores redundantes con restricciones físicas. El controlador propuesto considera dos partes. Primero se utiliza un PID cartesiano que logra estabilidad del sistema en lazo cerrado. La segunda parte del controlador considera un problema de optimización dividido a su vez en dos secciones. La primera de ellas considera el problema de optimización del error cartesiano en el efector final en posición. La segunda sección considera la evasión de obstáculos, que debido a la naturaleza del controlador pueden ser variantes en el tiempo. Es en esta parte del controlador donde se añaden al problema de optimización campos potenciales y las restricciones del manipulador por medio del uso del enfoque de funciones de barrera. Se utiliza el método de flujo gradiente para resolver el problema de optimización con restricciones. Se valida el control propuesto usando como plataforma experimental un robot planar tipo péndulo de 3 grados de libertad. Se presentan los resultados experimentales obtenidos, los cuales muestran la evasión del obstáculo dentro del espacio operacional y la realización exitosa de la tarea en espacio cartesiano, sin exceder las restricciones físicas del manipulador.

**Palabras clave:** Evasión de obstáculos, manipulador redundante, optimización, funciones de barrera, potenciales artificiales.

**Abstract** This paper presents an on-line obstacle avoidance method for redundant manipulators with physical constraints. The proposed controller considers two parts. First a Cartesian PID is used reaching closed loop stability. The second controller part considers an optimization problem divided in two sections. The first one considers the Cartesian position error optimization problem in the manipulator's end-effector. The second section considers obstacles avoidance that due to controller nature they can be time variant obstacles. In this part of the controller artificial potentials and barrier functions are added to the optimization problem. Gradient flow approach is used to solve the optimization problem and the on-line obstacle avoidance. The proposed control is validated using a three degree of freedom planar robot as an experimental platform. Experimental results are presented, which show the avoidance of the obstacle in operational space and the successful task performance in Cartesian space, keeping cartesian errors small and without exceeding manipulator space state constraints.

**Keywords:** Obstacle avoidance, redundant manipulator, optimization, barrier functions, artificial potentials.

*M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)  
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering  
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 275-284*

## 1. Introducción

El uso de manipuladores redundantes en ambientes industriales ha crecido debido a la gran variedad de tareas que pueden llevar a cabo. Para realizar estas tareas es necesario diseñar el robot con cierta estructura, la cual puede presentar restricciones físicas determinadas en muchas ocasiones por el área de trabajo del manipulador. Además, muchas de estas tareas se realizan con presencia de objetos ajenos al manipulador y a la tarea a realizar. Este es uno de los escenarios donde los manipuladores redundantes cobran mayor importancia debido a que, gracias a su estructura, estos pueden realizar múltiples tareas dentro de su espacio de trabajo. Una de estas tareas es la evasión de obstáculos. La estrategia natural de evasión de obstáculos es alejar el manipulador del obstáculo al hacer una reconfiguración de los eslabones, pero esto solo se puede hacer si el manipulador posee grados de libertad redundantes. Más aun, esta reconfiguración tradicionalmente requiere la cinemática inversa del manipulador la cual puede tener infinitas soluciones y en muchas ocasiones su solución es compleja y puede exceder los límites físicos del manipulador. Varios autores proponen técnicas de control para evasión de límites en las articulaciones, algunas usando algoritmos iterativos como los presentados en [1]. Algunos autores han usado potenciales artificiales para resolver el problema de evasión de obstáculos, sin embargo, aún hacen uso de la cinemática inversa del manipulador[2].

En este artículo se considera un controlador formador por dos partes, un PID cartesiano que se mapea al espacio articular mediante el jacobiano del manipulador y un controlador óptimo que realiza dos tareas, primero, mejorar el desempeño del PID cartesiano para que el efector final lleve a cabo la tarea de seguimiento de trayectorias y, segundo, evitar la colisión de los eslabones del manipulador con el objeto en espacio operacional al mismo tiempo que se evitan los límites en las articulaciones del manipulador. Debido a la definición de error en el espacio operacional cartesiano, se requiere la cinemática directa del manipulador. El problema de diseño del controlador es considerado como una optimización dinámica, el cual es resuelto en línea mediante el método del flujo gradiente [4]. Así pues, es necesario el cálculo de las sensitividades del modelo del manipulador respecto de los controles, que son las derivadas parciales de los estados del sistema respecto del control optimizante, para resolver en línea un conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución son las sensitividades mencionadas anteriormente. Este trabajo es una extensión del trabajo presentado en [3], donde solo se considera optimización del error de posición y velocidad en el efector final del manipulador sin considerar las restricciones físicas en el manipulador.

## 2. Modelos cinemático y dinámico del manipulador

Considere un robot rígido de  $n$ -grados de libertad rotacionales completamente actuados, con coordenadas generalizadas  $q \in \mathbb{R}^n$ . El espacio de trabajo del robot es  $m$ -dimensional, de manera general  $n \geq m$ , y para manipuladores redundantes  $n > m$ . La energía cinética del manipulador es  $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$ , con  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la matriz de inercia simétrica y definida positiva, la energía potencial es  $U(q)$ . Aplicando el formalismo de Euler-Lagrange [6] el modelo del robot en coordenadas articulares, está dado por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (1)$$

$$|q| \leq q^*$$

donde  $G(q) = \frac{\partial}{\partial q} U(q) \in \mathbb{R}^n$  denota las fuerzas gravitacionales,  $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  representa la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis,  $\tau \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de torques de entrada en cada uno de los eslabones y  $q^*$  un vector constante que representa la restricción de rotación en la articulaciones. Para describir completamente el manipulador es necesario caracterizar su modelo cinemático [7]. La cinemática directa del robot que relaciona las coordenadas generalizadas  $q \in \mathbb{R}^n$  con las coordenadas cartesianas  $X \in \mathbb{R}^m$ , que usualmente representan las coordenadas del efector final, está dada por

$$X = F_{DK}(q) \quad (2)$$

De manera análoga, la cinemática inversa del robot, que relaciona de manera inversa las coordenadas generalizadas y las cartesianas, está dada por

$$q = F_{IK}(X) \quad (3)$$

El problema de la cinemática inversa tiene múltiples soluciones, las cuales pueden violar las restricciones articulares del manipulador.

Finalmente para relacionar el espacio articular y el espacio cartesiano es necesario relacionar los torques articulares  $\tau$  con las fuerzas cartesianas  $F$ , para lo cual se utiliza el Jacobiano del manipulador dado por  $J(q) = \frac{\partial F_{DK}(q)}{\partial q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con lo que las fuerzas cartesianas quedan relacionadas con los torques articulares mediante la relación

$$\tau = J(q)^T F \quad (4)$$

### 3. Control óptimo articular/cartesiano con restricciones

La segunda parte del controlador considera el problema de optimización del error de posicionamiento del efector final para mejorar el desempeño del controlador PID cartesiano, conjuntamente con el uso de potenciales artificiales y funciones de barrera. Al considerar lo anterior se propone el torque de entrada en (1), usando (4) como

$$\tau = J(q)^T F_{PID} + \tau_o \quad (5)$$

donde  $F_{PID} \in \mathbb{R}^m$  es el control PID cartesiano, y  $\tau_o \in \mathbb{R}^n$ . Nótese que debido a la redundancia del robot ( $n > m$ ), el Jacobiano  $\in \mathbb{R}^{m \times n}$  no es cuadrado.

#### 3.1. PID cartesiano

El control PID cartesiano se basa en las variables cartesianas  $X$ , por lo que al considerar la cinemática directa del robot (5) se obtiene

$$F_{PID} = K_{p,c}e_c + K_{d,c}\dot{e}_c + K_{i,c} \int e_c dt \quad (6)$$

donde  $K_{p,c}$ ,  $K_{d,c}$ ,  $K_{i,c} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices diagonales de las ganancias proporcionales, derivativas e integrales, respectivamente, del controlador PID,  $e_c \in \mathbb{R}^m$  representa el error cartesiano de seguimiento,  $\dot{e}_c \in \mathbb{R}^m$  representa el error cartesiano de velocidad de seguimiento, los cuales están dados por

$$e_c = X_d - X = X_d - F_{DK}(q) \quad (7)$$

$$\dot{e}_c = \dot{X}_d - \dot{X} = \dot{X}_d - J(q)\dot{q} \quad (8)$$

donde  $X_d$ ,  $\dot{X}_d$  son las posiciones y velocidades cartesianas deseadas respectivamente.

### 3.2. Control óptimo en línea

Para mejorar el desempeño del controlador en lazo cerrado y además realizar la tarea de evasión de obstáculos se considera un problema de optimización dinámico relacionado con el error de posicionamiento del efector final  $e_c$  y con la distancia  $e_{oi}$  relacionada con la posición  $X_o$  del obstáculo y la posición del extremo  $X_i$  de cada uno de los tres eslabones del manipulador mediante la siguiente expresión

$$e_{oi} = X_o - X_i \quad (9)$$

Se añaden potenciales artificiales al índice de optimización de posición para representar el obstáculo, estos tienen la forma presentada en [9]. Más aún, para considerar las restricciones de movimiento del manipulador se utiliza el enfoque de funciones de barrera presentado en [8]. El problema de optimización se formula entonces como

$$\min_{\tau_{oi}} I_i = \frac{1}{2} e_c^2 \left( 1 + \left( \frac{\alpha_i}{e_{oi}^2 + \rho_i} \right) - \frac{\mu_i}{q_i - q^*} + \frac{\mu_i}{q_i + q^*} \right) \quad (10)$$

donde  $q_i$  es la posición angular del  $i$ -ésimo eslabón,  $\alpha_i$  y  $\mu_i$  son ganancias de la función de optimización y  $\rho_i$  un parámetro de diseño del controlador relacionado con la distancia a la que actúa el potencial sobre el manipulador,  $e_c$  es el error de posicionamiento cartesiano y  $e_{oi}$  es la distancia entre el obstáculo y el  $i$ -ésimo eslabón. El problema de optimización está sujeto a la dinámica del manipulador y a la restricción de posición dada por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = J(q)^T F_{PID} + \tau_o \quad (11)$$

$$|q| \leq q^*$$

Para resolver el problema dinámico de optimización en línea (10), se usa el método del flujo gradiente [4]. Se obtiene el gradiente del índice de desempeño (10) respecto de la variable de optimización  $\tau_o$ , como

$$\dot{\tau}_{oi} = -\gamma \frac{\partial I_i}{\partial \tau_{oi}} \quad (12)$$

donde  $\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal de ganancias relacionada con la convergencia del método del flujo gradiente. Usando además (7) y (8), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \tau_{o_i}} = 2e_d \left( -\alpha_i e_d \left( \frac{e_{o_i}}{(e_{o_i} + \rho_i)^2} \right) \frac{\partial e_{o_i}}{\partial \tau_{o_i}} + \left( 1 + \left( \frac{\alpha_i}{e_{o_i} + \rho_i} \right) \frac{\partial e_{o_i}}{\partial \tau_{o_i}} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{\mu_i}{(q_i - q^*)^2} - \frac{\mu_i}{(q_i + q^*)^2} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \tau_{o_i}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

de tal manera que por regla de la cadena se sigue que  $\frac{\partial F_{DK}}{\partial \tau_{o_i}}$  depende de las sensitividades  $\left[ \frac{\partial q}{\partial \tau_{o_i}} \right]$ , que se obtienen mediante derivación parcial en (11), de tal forma que

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} \left[ J(q)^T F_{PID} + \tau_o - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) \right] \quad (14)$$

Ahora, considere el vector columna  $\xi = [q \ \dot{q} \ q_I]^T \in \mathbb{R}^{(2n+m) \times 1}$ , donde  $q_I$  denota los estados relacionados con la parte integral del controlador PID (6), derivando este vector respecto del tiempo y usando (14) se obtiene un sistema dinámico no lineal de la forma

$$\dot{\xi} = f(\xi, \tau_{o_i}) \quad (15)$$

Luego derivando este sistema respecto de  $\tau_{o_i}$  e invirtiendo el orden de los operadores lineales  $\left[ \frac{\partial}{\partial \tau_{o_i}}, \frac{d}{dt} \right]$ , se sigue que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial \tau_{o_i}} = \frac{\partial f(\xi, \tau_{o_i})}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau_{o_i}} + \frac{\partial f(\xi, \tau_{o_i})}{\partial \tau_{o_i}} \quad (16)$$

Nótese que  $\frac{\partial \xi}{\partial \tau_{o_i}}$  corresponde a la matriz de sensitividades, más aún, (16) es un sistema dinámico lineal en términos de  $\frac{\partial \xi}{\partial \tau_{o_i}}$ . La complejidad del control óptimo recae en el cálculo de las sensitividades  $\frac{\partial q}{\partial \tau_{o_i}}$ , sin embargo para casos en que sea impráctico el cálculo exacto de éstas, existen aproximaciones numéricas como se presentan en [5].



Figura 1. Robot planar de 3 grados de libertad.

#### 4. Resultados

La plataforma experimental del controlador propuesto 5 es un manipulador redundante cartesiano de tres grados de libertad mostrado en la figura (1), su diseño y construcción es presentado en [10], sus características técnicas se detallan en la tabla 1.

Tabla 1. Datos técnicos de los Servomotores

| Característica        | Dato       |
|-----------------------|------------|
| Voltaje Nominal       | 24 [V]     |
| Velocidad sin carga   | 23 000 rpm |
| Relación de reducción | 159:01     |
| Torque máximo         | 4.5 N m    |
| Resolución            | 500 ppr    |

Para estimar los valores de los parámetros del manipulador se usaron herramientas CAD, sus valores se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Parámetros físicos del Robot

| i | $m_i$ [Kg] | $I_i$ [Kg m <sup>2</sup> ] | $l_{c,i}$ [m] | $l_i$ [m] |
|---|------------|----------------------------|---------------|-----------|
| 1 | 0.7        | $16.84 \times 10^{-3}$     | 0.144         | 0.175     |
| 2 | 0.6        | $8.4 \times 10^{-3}$       | 0.108         | 0.130     |
| 3 | 0.12       | $0.25 \times 10^{-3}$      | 0.060         | 0.147     |

La trayectoria que se desea en el efector final  $\mathbf{X}_d$  en (7) se realiza durante 60 segundos y sigue una trayectoria circular dada por

$$\mathbf{X}_d = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} 0,05 \sin(\omega t) + 0,25[m] \\ 0,05 \cos(\omega t) - 0,2 [m] \end{cases} \quad (17)$$

con  $\omega$  la frecuencia de la trayectoria deseada, en este caso de  $\omega = 1$ . El obstáculo es una esfera que se mueve en dirección horizontal acercándose al primer eslabón. La trayectoria del obstáculo es una recta horizontal que inicia en  $x_i = -0,5[m]$ , termina en  $x_f = 0[m]$  y es realizada en un tiempo  $t_o = 10[s]$ , y está dada por

$$\mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} = \begin{cases} -0,001t^3 + 0,015t^2 - 0,5[m] \\ -0,175 [m] \end{cases} \quad (18)$$

Por razones de seguridad los pares suministrados a los eslabones están limitados en la parte experimental a  $\tau_1 \leq 4,0$ ,  $\tau_2 \leq 3,5$  y  $\tau_3 \leq 3,0$  [Nm]. En la condición inicial el robot se encuentra totalmente vertical con el efector final apuntando hacia abajo, es decir,  $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$ , por lo que la posición inicial del efector final del robot es  $x = 0[m]$  y  $y = -0,427[m]$ . La restricción de movimiento se toma en cuenta en el problema de optimización usando el enfoque de funciones de barrera [8] en (10). Por lo que se tiene que  $|q| \leq q^*$ , con  $q^* = 2,618 rad$ .

Con el propósito de comparar el comportamiento del manipulador al realizar la tarea con y sin la presencia del obstáculo, además de comprobar que las restricciones de movimiento se cumplen en todo momento, primero se prueba el PID cartesiano. Luego se utiliza la estrategia de control óptimo para evasión de obstáculos con restricciones. Las ganancias utilizadas en cada uno de los eslabones se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Ganancias del PID cartesiano

|   | $K_{p,c}$ | $K_{d,c}$ | $K_{i,c}$ |
|---|-----------|-----------|-----------|
| X | 1200      | 160       | 5         |
| Y | 1500      | 160       | 5         |

#### 4.1. Control PID cartesiano

La figura (2) muestra la trayectoria del efector final, la cual puede ser comparada con la trayectoria deseada (17). Los errores cartesianos (7) se muestran en la figura (3). La figura (4) muestra los pares de entrada, la figura (5) las posiciones angulares de los eslabones del robot.

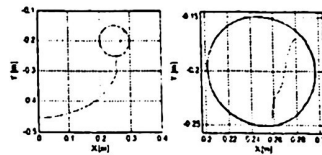


Fig 2. Trayectoria seguida por el efector final (PID cartesiano).

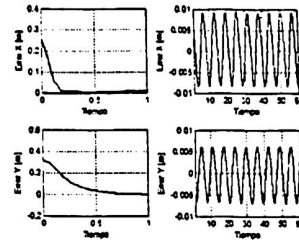


Fig 3. Errores cartesianos y su acercamiento [m] (PID cartesiano).

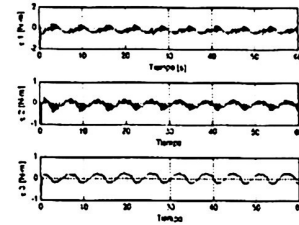


Fig 4. Torques articulares [Nm] (PID cartesiano).

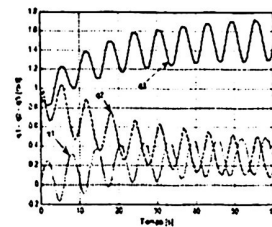


Fig 5. Posiciones angulares de los eslabones del robot [rad] (PID cartesiano).

#### 4.2. Control óptimo para evasión de obstáculos

Para realizar la comparación se conservan las ganancias del PID cartesiano mostradas en la tabla 3. Las ganancias de la parte optimizante del controlador son  $\gamma_i = 0,0005$ ,  $\alpha_i = 0,0001$ ,  $\mu_i = 1 \times 10^{-10}$ , y  $\rho_i = 1$  donde  $\gamma_i$ ,  $\alpha_i$ , y  $\rho_i$  corresponde al eslabón  $i$ , para  $i = 1, 2, 3$ . La figura (6) muestra la trayectoria del efector final, la cual puede ser comparada con la trayectoria deseada (17). Los errores cartesianos (7) se muestran en la figura (7). La figura (8) muestra los torques de entrada, la figura (9) muestra las posiciones angulares de los eslabones del manipulador, las sensibilidades del eslabón  $i$ , para  $i = 1, 2, 3$  se muestran en la figura (10).

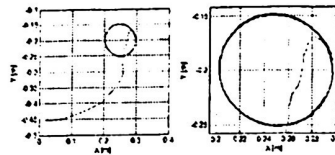


Fig 6. Trayectoria seguida por el efector final (PID cartesiano +  $\tau_o$ ).

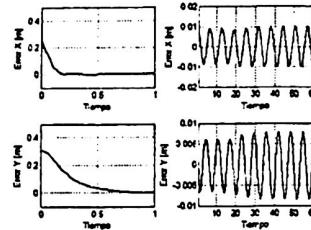


Fig 7. Errores cartesianos y su acercamiento [m] (PID cartesiano +  $\tau_o$ ).

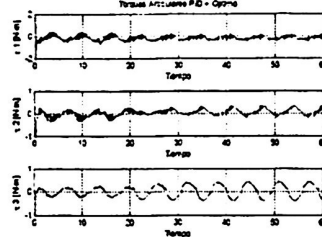


Fig 8. Torques articulares [Nm] (PID cartesiano +  $\tau_o$ ).

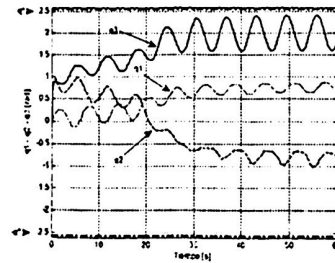


Fig 9. Posiciones angulares de los eslabones del robot [rad] (PID cartesiano +  $\tau_o$ ).

#### 4.3. Discusión de los resultados

Se puede observar fácilmente de las figuras (2) y (6) que la tarea de seguimiento de trayectorias es realizada de manera exitosa por ambos controladores, no así la de evasión de obstáculos.

De las figuras (5) y (9) se observa que la tarea de evasión de obstáculos se logra de tal manera que el robot se reconfigura tomando valores distintos en las posiciones angulares, en ambos casos sin exceder los límites en las juntas del manipulador. Esta reconfiguración no afecta de manera significativa el desempeño del manipulador al realizar la tarea de seguimiento.

Esto se puede ver en las figuras (3) y (7) donde los errores cartesianos se mantienen pequeños. En la figura (9) se observa que el eslabón de la base es el que rige la nueva configuración, al ampliar su rotación, lo cual ocasiona que el eslabón dos cambie su sentido de rotación para mantener los errores de seguimiento cercanos a cero y al mismo tiempo realizar exitosamente la tarea de evasión de obstáculos sin exceder los límites en las juntas del manipulador. Cuando los errores cartesianos son pequeños la parte del controlador óptimo se encarga de mejorar el comportamiento de seguimiento de trayectorias, al mismo tiempo que se ocupa de llevar a cabo la tarea de evasión de obstáculos en línea. La figura (10) muestra el comportamiento en el tiempo de las sensibilidades articulares, las cuales son acotadas. Finalmente la figura (11) muestra las dos configuraciones realizadas por el manipulador para cada uno de los controles probados.

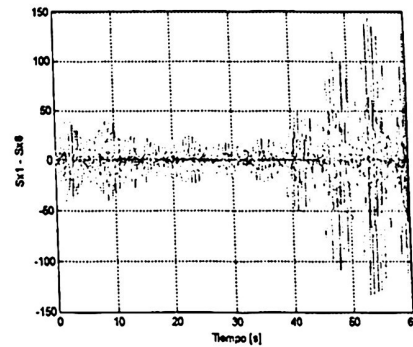


Fig 10. Sensitivities articulares (PID cartesiano +  $\tau_o$ ).

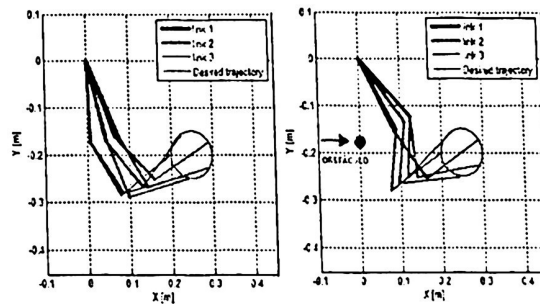


Fig 11. Configuraciones del manipulador (PID) / (PID cartesiano +  $\tau_o$ ).

## 5. Conclusiones

Se ha presentado un controlador cartesiano/articular para manipuladores redundantes, el cual combina un control PID cartesiano para propósitos de estabilización y un control óptimo para mejoramiento de seguimiento de trayectorias y evasión de obstáculos. El controlador está diseñado para seguimiento de trayectorias, sin embargo no se necesita la cinemática inversa del robot. La parte optimizante del robot resuelve el problema de planeación de trayectorias y al mismo tiempo el problema de evasión de obstáculos, minimizando el error de seguimiento de trayectorias. Esto se logra sin exceder en momento alguno las restricciones de posición del robot. Los resultados experimentales muestran que las tareas de seguimiento de trayectorias y de evasión de obstáculos son logradas con éxito, al mismo tiempo que las restricciones de posición angular del manipulador no se violan en tiempo alguno.

## Referencias

1. Chaumette F., Marchand E... *A Redundancy-Based Iterative Approach for Avoiding Joint Limits: Application to Visual Servoing*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 17, No. 5, October 2001.
2. Nakamura, Y. *Advanced Robotics : Redundancy and Optimization*. Adison-Wesley, 1991. P.p. 135-150.
3. Cruz V. C.A., Rodríguez A. A., Muro M.D. *On-line Joint/Cartesian Optimal Control of Redundant Robot Manipulators without Inverse Kinematics*. En memorias del congreso AMROB, 2007.
4. Helmke, U., and J.B. Moore. *Optimization and Dynamical Systems*. Springer Verlag, London, 1996.
5. Maly, T., and L. Petzold. *Numerical Methods and Software for Sensitivity Analysis of Differential-Algebraic Systems*, Applied Numerical Mathematics, 20, p.p. 57-59, 1996.
6. Lewis, Lewis, F. L., C. T. Abdallah, and D. M. Dawson. *Control of Robot Manipulators*. Macmillan Publishing, New York, 1993.
7. Spong, M. W., and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. JohnWiley and Sons, New York, 1989.
8. Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M.. *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons Inc. Second edition. 1993.
9. Mather Khatib. *Sensor based motion control for module robots*. Tesis Doctorado. LAAS-CNRS, Toulouse, France, 1994.
10. Muro M.D, Cruz V. C.A., Rodríguez A. A. *Diseño, modelado y construcción de un manipulador redundante*. En memorias del 5º congreso CIINDET 2007.
11. Smith, T.F., Waterman, M.S.: Identification of Common Molecular Subsequences. J. Mol. Biol. 147, 195-197 (1981)

Los autores agradecen el apoyo recibido por parte del CONACYT por medio del proyecto No. 61838.